Théorème :

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine.

dém. :

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $p \in \mathbb{N}^*$. $P = a_p X^p + \cdots + a_1 X + a_0$ avec $a_p \neq 0$.

$A = \{|P(z)| / z \in \mathbb{C}\}$ est une partie non vide et minorée (par 0) de $\mathbb{R}$ donc $\alpha = \inf A = \inf_{z\in\mathbb{C}} |P(z)|$ existe.

Nous allons montrer que α est une valeur prise par P puis que $\alpha = 0$. Ceci permettra alors de conclure.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \geq 1$, on a $a_p z^p = P(z) + \sum_{k=0}^{p-1} -a_k z^k$

donc $|a_p z^p| \leq |P(z)| + \sum_{k=0}^{p-1} |a_k| |z^k| \leq |P(z)| + pM|z|^{p-1}$ en notant $M = \max_{0\leq k\leq p-1} |a_k|$.

Par suite $|P(z)| \geq |a_p| |z|^p - pM|z|^{p-1} \xrightarrow[|z|\to+\infty]{} +\infty$.

Il en découle que l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tel que $|P(z)| \leq \alpha + 1$ est bornée.

Considérons maintenant (z_n) suite complexe telle que $P(z_n) \to \alpha$. Soulignons qu'une telle suite existe par le principe de réalisation d'une borne inférieure et qu'elle est bornée en vertu de l'étude ci-dessus.

Par le théorème de Bolzano Weierstrass, on peut extraire de (z_n) une suite convergente $(z_{\varphi(n)})$.

Posons ω la limite de cette dernière.

Par opérations sur les limites $P(z_{\varphi(n)}) = a_p z_{\varphi(n)}^p + \cdots + a_1 z_{\varphi(n)} + a_0 \to a_p \omega^p + \cdots + a_1 \omega + a_0 = P(\omega)$

D'autre part, par extraction, $P(z_{\varphi(n)}) \to \alpha$ donc par unicité de la limite $P(\omega) = \alpha$.

Ainsi nous venons d'établir que α est une valeur prise par P.

Il ne reste plus qu'à montrer $\alpha = 0$ et pour cela nous allons raisonner par l'absurde en supposant $\alpha > 0$.

Quitte à considérer le polynôme $\frac{P(X+\omega)}{\alpha}$, on peut supposer $\alpha = 1$ et $\omega = 0$.

On a alors $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_p X^p$ avec $a_0 = 1 = \min_{z\in\mathbb{C}} |P(z)|$, $p > 1$ et $a_p \neq 0$.

En introduisant q le premier indice tel que $a_q \neq 0$, on obtient $P = 1 + a_q X^q + a_{q+1} X^{q+1} + \cdots + a_p X^p$.

Ecrivons $a_q = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Pour $z = r e^{i(\theta+\pi)/q}$ avec $r > 0$, on a : $P(z) = 1 - \rho r^q + \sum_{k=q+1}^{p} a_k r^k e^{ik(\theta+\pi)/q}$ et donc $|P(z)| \leq |1 - \rho r^q| + \sum_{k=q+1}^{p} |a_k| r^k$.

Pour r suffisamment petit, on obtient $|P(z)| \leq 1 - \rho r^q + \sum_{k=q+1}^{p} |a_k| r^k = 1 + f(r)$

avec $f(r) = -\rho r^q + \sum_{k=q+1}^{p} |a_k| r^k \underset{r\to 0}{\sim} -\rho r^q < 0$.

Par suite, il existe des $z \in \mathbb{C}$ tel que $|P(z)| < 1 = \min_{z\in\mathbb{C}} |P(z)|$. Absurde !